
POTENTIALE, FELDER UND ABLEITUNGEN

Wir beginnen, die mathematischen Grundlagen der Analysis in mehreren Dimensionen zu erarbeiten.

[H25] *Potentiale* **[$2+2+2+2+4=12$ Punkte]**
Welche der folgenden Kraftfelder besitzen ein Potential? Hierbei ist $\vec{r}=(x,y,z)$. Geben Sie das etwaige Potential an.

(a) $\vec{F}(\vec{r})=(x,0,0)$;
(b) $\vec{F}(\vec{r})=(x,y,0)$;
(c) $\vec{F}(\vec{r})=(-y,x,0)$;
(d) $\vec{F}(\vec{r})=-(y+z,z+x,x+y)$.

Hinweise: Hier hilft Ihnen die in der Vorlesung eingeführte Differentiation $\operatorname{grad}\vec{F}$. Um zu überprüfen, ob ein Potential V existiert, $F^i=-\partial_i V$, betrachten Sie $\partial_i F^j-\partial_j F^i$.

[H26] *Felder* **[$3+3+3+3=12$ Punkte]**
Berechnen Sie die zu den folgenden Potentialen gehörenden Kraftfelder und skizzieren Sie qualitativ die Äquipotentiallinien in der Ebene $z=0$. Welche der zugehörigen Kraftfelder sind Zentralfelder?

(a) $V(\vec{r})=A(x^4+y^4+z^4),\quad A=\text{const};$
(b) $V(\vec{r})=A(x^4+y^4+z^4+4x^2y^2+4y^2z^2+4z^2x^2),\quad A=\text{const};$
(c) $V(\vec{r})=\vec{a}\cdot\vec{r},\quad a^i=\text{const};$
(d) $V(\vec{r})=a/r^2-b/r,\quad a,b=\text{const}.$

Hinweise: Äquipotentiallinien sind die Graphen der Punktmengen $\{\vec{r}:V(\vec{r})=\text{const}\}$, hier also $\{(x,y):V(x,y,0)=\text{const}\}$. Zentralfelder sind Felder $\vec{F}(\vec{r})$, die die Form $\vec{F}(\vec{r})=f(r)\frac{\vec{r}}{r}$ mit $r=|\vec{r}|$ haben. Sie zeigen also immer auf ein Zentrum hin oder von ihm weg, und die Kraft hängt in Ihrer Stärke nur vom Abstand ab[1].

[1] Allgemeiner muss das Kraftzentrum natürlich nicht mit dem Ursprung zusammenfallen. Hängt, wie hier gefordert, die Kraft allein vom Abstand ab, spricht man auch von einer Zentralkraft im engeren Sinne.

[H27] *Tangentialvektoren* **[6 Punkte]**
Zeigen Sie, dass die Tangentialvektoren an eine n-dimensionale Kugelfläche senkrecht auf den zugehörigen Ortsvektoren vom Kugelmittelpunkt zur Kugelfläche stehen. *Hinweis*: Differenzieren Sie eine für die Kugel charakteristische Funktion der Koordinaten $\vec{r}(t)$ einer Bahn auf der Kugelfläche.

Bitte wenden!

SPIELREGELN ZUR COMPUTERÜBUNG

Die Bearbeitung der Übungsaufgaben erfolgt, wie bei den Hausübungen, allein. Der Lösungsweg soll vollständig mit *Mathematica* ausgeführt und in einem "Notebook" dokumentiert werden. Ein Ausdruck davon ist abzugeben. Zusätzlich schicken Sie Ihr Notebook als Datei per Email an Ihren Tutor. Gegebenenfalls müssen Sie Ihre Lösung dann noch in der Präsenzübung vorführen.

Die Computerübungen sind Teil der Studienleistung. Sie müssen *alle* sinnvoll bearbeitet werden. Die Punkte dienen nur als grobe Richtschnur. Ihr Tutor wird Ihnen mitteilen, falls Ihre Lösung noch nachgebessert werden muss.

Die spezielle Sprechstunde für die Computerübungen findet im CIP, Raum 034 im Institut für Theoretische Physik, Appelstraße 2, in der Zeit Dienstags, 10:00 – 11:30 statt.

[C3] *Trägheitstensor und Hauptachsentransformation* **[15 Punkte]**

In dieser Übung sollen Sie versuchen, mit *Mathematica* ein Verfahren zu implementieren, das für N Massepunkte mit Massen m_α an Positionen $\vec{r}_\alpha$ den Trägheitstensor berechnet und anschließend auf Hauptachsenform bringt.

(a) Verwenden Sie als Eingabe zwei Listen mit jeweils N Elementen. Die erste enthält die Massen, die zweite die Positionsvektoren. Da der Trägheitstensor im allgemeinen auf den Schwerpunkt des Systems bezogen ist, schreiben Sie zuerst eine Prozedur, die den Schwerpunkt berechnet:

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha\,, \quad M = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha$$

(b) Programmieren Sie nun den Trägheitstensor Θ, definiert als

$$\Theta^{ij} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \Big((\vec{r}\,'_\alpha)^2 \delta^{ij} - x'^{\,i}_\alpha x'^{\,j}_\alpha \Big)\,,$$

wobei $x'^{\,i}_\alpha$ die i-te Komponente der um die Position des Schwerpunktes verschobenen Position $\vec{r}\,'_\alpha = \vec{r}_\alpha - \vec{R}$ ist. Nutzen Sie dabei Symmetrien von Θ aus, um nicht unnötig viele Komponenten wirklich ausrechnen zu lassen. Die Hauptachsentransformation erledigt netterweise das Kommando `Eigensystem` für Sie.

(c) Überprüfen Sie Ihr Programm an Hand folgender drei Beispiele:
- Vier Massepunkte gleicher Masse m an den Koordinaten $\vec{r}_1 = (0,0,0)^\mathsf{T}$, $\vec{r}_2 = (1,0,0)^\mathsf{T}$, $\vec{r}_3 = (0,1,0)^\mathsf{T}$, $\vec{r}_4 = (0,0,1)^\mathsf{T}$.
- Acht Massepunkte an den Ecken eines Würfels mit Kantenlänge a, wobei die vier oberen Massepunkte die Masse m, die vier unteren die doppelte Masse $2m$ haben.
- Drei Massepunkte gleicher Masse m, die mittels `RandomReal` zufällig im würfelförmigen Bereich $[-1,1]\times[-1,1]\times[-1,1]\subset\mathbb{R}^3$ gewählt werden.

(d*) *Zusatzaufgabe*: Erstellen Sie Plots, die jeweils die Massepunkte zeigen, und – ausgehend vom Schwerpunkt – die drei Hauptachsen einzeichnen.

[C4] *Euklidischer Algorithmus* **[15 Punkte]**

Erstellen Sie eine Funktion `ggt[p,q]`, die mittels des Euklidischen Algorithmus für zwei ganze Zahlen p, q den größten gemeinsamen Teiler findet. Damit definieren Sie eine Funktion `kuerzen[b]`, die Brüche $b = p/q$, repräsentiert als zwei-elementige Listen $\{$`p,q`$\}$, kürzt. Abschließend schreiben Sie zwei Prozeduren `plus[b1,b2]` und `mal[b1,b2]`, die zwei Brüche b_1 und b_2 addieren bzw. multiplizieren können, und als Ergebnis einen korrekt gekürzten Bruch zurückgeben.

HINWEIS

Bitte geben Sie auf Ihren abgegebenen Lösungen immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe (Nummer und Name des Tutors) an! Lösungen unbedingt zusammenheften!